

Kvanttimekaniikkaa

13.4.2019

1. Tarkastellaan elektronia kuvaavia kvanttimekaanisia tilavektoreita

$$|\psi_1\rangle = 3|0\rangle + 4|1\rangle,$$

$$|\psi_2\rangle = |0\rangle + 2|1\rangle,$$

$$|\psi_3\rangle = 3|0\rangle - |1\rangle.$$

Tilat $|0\rangle$ ja $|1\rangle$ vastaavat elektronin jonkin binäärisen suureen mahdollisia arvoja. Esimerkiksi spinin arvoja z -akselin suunnassa mitattuna ("ylös", $|0\rangle$; ja "alas", $|1\rangle$).

(a) Normita tilavektorit, eli laske vektorin pituus ja jaa pituudella, jolloin saat yksikkövektorin.

(b) Laske todennäköisyys saada mittauksessa tulos spin ylös tai alas, kun mittaus suoritetaan tilassa $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ tai $|\psi_3\rangle$ olevalle elektronille.

2. Valitse jokin edellisen tehtävien normitetuista tilavektoreista $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ tai $|\psi_3\rangle$. Kerro se millä tahansa luvulla a ja tutki mitä tapahtuu tehtävässä 1 lasketuille todennäköisyyksille.

3. Elektronilla on toinen binäärinen ominaisuus, jonka arvoja vastaavat tilat voidaan kirjoittaa tehtävässä 1 esiintyvien tilojen $|0\rangle$ ja $|1\rangle$ lineaarikombinaatioina. Esimerkiksi spinin arvoja x -akselin suunnassa vastaavat tilat voidaan lausua z -akselin suuntaisten tilojen lineaarikombinaatioina.

Merkitään mahdollisia arvoja molemmissa tapauksissa 0 ja 1, mutta erotetaan eri suureisiin liittyvät tilat alaindeksillä:

$$|0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_z + |1\rangle_z),$$

$$|1\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_z - |1\rangle_z).$$

(a) Mieti yllä olevia määritelmiä hetki ja palauta mieleen luennolla esitetyt vastaavat tulokset: eri "väreihin" liittyvät tilat voitiin kirjoittaa eri "muotoihin" liittyvien tilojen avulla täsmälleen yllä esitetyllä tavalla.

(b) Olkoon sitten elektroni tilassa

$$|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{13}}|0\rangle_z + \frac{3}{\sqrt{13}}|1\rangle_z.$$

(i) Jos mitataan tästä tilasta elektronin spin z -akselin suunnassa, niin mitä voidaan saada tulokseksi, ja millä todennäköisyydellä?

Voit ajatella vektoreita $|0\rangle$ ja $|1\rangle$ analogisesti tason yksikkövektorien \hat{x} ja \hat{y} kanssa.

Todennäköisyystulkintaa on käteväntä soveltaa normitettuihin tilavektoreihin. Tilavektorin todennäköisyystulkinta on helpointa tehdä normitetulle tilavektorille.

Huom: Elektronin spin *minkä tahansa* akselin suunnassa mitattuna on joko "ylös" tai "alas" (eli 0 tai 1).

- (ii) Jos tästä tilasta mitataankin elektronin spin x -akselin suunnassa, niin mitä voidaan saada tulokseksi, ja millä todennäköisyydellä?
- (iii) Piirrä histogrammi (i)- ja (ii)-kohdan mittauksesta 100 elektronille, jotka on valmistettu tilaan $|\psi\rangle$.

4. Elektronisuihku koostuu tilaan

$$|\phi\rangle = \frac{3}{\sqrt{34}}|0\rangle_z + \frac{5}{\sqrt{34}}|1\rangle_z$$

valmistetuista elektroneista.

- (a) Jos mitataan elektronin spin z -akselin suunnassa, niin mitä voidaan saada tulokseksi ja millä todennäköisyydellä kukin tulos esiintyy?
- (b) Eräälle elektronille mittaus antoi tulokseksi "ylös" (eli 0). Tämän jälkeen välittömästi mitataan spin x -akselin suunnassa. Mitä voidaan nyt saada tulokseksi, ja millä todennäköisyydellä kukin mahdollisista arvoista esiintyy?

S1. Eräällä kvanttimekaaniseen hiukkaseen liittyvällä suurella A on kolme mahdollista arvoa, 0, +1 ja -1. Näihin liittyvät kvanttimekaaniset tilat $|0\rangle$, $|1\rangle$ ja $|-1\rangle$. Tarkastellaan hiukkasta, jonka tilavektori on

$$|\psi\rangle = 1|0\rangle - 2|1\rangle + 5|-1\rangle.$$

Jos suureen A arvo mitataan tilasta $|\psi\rangle$, niin mitä mahdollisia arvoja voidaan saada tulokseksi, ja mikä on kuhunkin arvoon liittyvä todennäköisyys?