1.

Jotta kokonaistodennäköisyys olisi yksi, tilan normin tulee olla yksi. Normittaminen tarkoittaa vektorin yksikkövektorin etsimistä.

Tilan normi lasketaan seuraavasti

$$\sqrt{\langle\psi'|\psi'\rangle} = \sqrt{\sum_i a_i^2}.$$

Koska käsittelemme nyt ainoastaan reaalisia vektoreita, tämä on sama asia kuin tavallisen pistetulon laskeminen ja sen neliöjuuren ottaminen

$$\sqrt{\bar{v}\cdot\bar{v}} = \sqrt{\sum_i a_i^2}.$$

Kolmessa ulottuvuudessa tämä on

$$\sqrt{\bar{v}\cdot\bar{v}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

a) i) Tilan normi (pituus) on

$$\sqrt{\langle\psi_1|\psi_1\rangle} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

ja niinpä normalisoitu tilavektori on

$$|\psi_1'\rangle = \frac{1}{5}|\psi_1\rangle = \frac{1}{5}\cdot\Big(3|0\rangle + 4|1\rangle\Big) = \frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4}{5}|1\rangle$$

ii) Lasketaan kuten yllä. Normi:

$$\sqrt{\langle\psi_2|\psi_2\rangle} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Normitettu tilavektori:

$$|\psi_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|1\rangle$$

iii) Normi:

$$\sqrt{\langle\psi_3|\psi_3\rangle} = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

Normitettu tilavektori:

$$|\psi_3'\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{10}}|1\rangle$$

b) Tarkastellaan tilaa

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle.$$

Todennäköisyys havaita systeemi tilassa $|0\rangle$ mittauksen yhteydessä (eli spin ylös) on $|a|^2$. Vastaavasti todennäköisyys havaita systeemi tilassa $|1\rangle$ (spin alas) on $|b|^2$.

Todennäköisyydet havaita tietty mittaustulos

	spin ylös	**spin alas**	**tarkistus**
i)	$\left\lvert \frac{3}{5} \right\rvert^2 = \frac{9}{25}$	$\left\lvert \frac{4}{5} \right\rvert^2 = \frac{16}{25}$	$\frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$
ii)	$\left\lvert \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rvert^2 = \frac{1}{5}$	$\left\lvert \frac{2}{\sqrt{5}} \right\rvert^2 = \frac{4}{5}$	$\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$
iii)	$\left\lvert \frac{3}{\sqrt{10}} \right\rvert^2 = \frac{9}{10}$	$\left\lvert -\frac{1}{\sqrt{10}} \right\rvert^2 = \frac{1}{10}$	$\frac{9}{10} + \frac{1}{10} = 1$

2.

i) Nyt tila on

$$\lvert \phi_1 \rangle = a \lvert \psi_1' \rangle,$$

missä $\lvert \psi_1' \rangle$ on normitettu tila, joka ratkaistiin edellä.

Tila pitää normittaa uudestaan. Normi:

$$\sqrt{\langle \phi_1 \vert \phi_1 \rangle} = \sqrt{a^2 \langle \psi_1' \vert \psi_1' \rangle} = a \cdot \sqrt{\langle \psi_1' \vert \psi_1' \rangle} = a \cdot 1 = a.$$

Eli uusi normitettu tila on

$$\lvert \phi_1' \rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \phi_1 \vert \phi_1 \rangle}} \lvert \phi_1 \rangle = \frac{1}{a} \lvert \phi_1 \rangle = \frac{1}{a} a \lvert \psi_1' \rangle = \lvert \psi_1' \rangle$$

Päädyimme alkuperäiseen tilavektoriin, eli todennäköisyydet säilyvät samoina.

ii) & **iii)** Sama kuin edellä.

3.

a) Luennolla käsiteltiin seuraavan muotoista tilaa

$$\lvert \bigcirc \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\lvert \triangle \rangle + \lvert \square \rangle \Big).$$

Jos tarkastellaan eo. tilaa esimerkiksi tehtävän ensimmäisen tilan

$$\lvert 0 \rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\lvert 0 \rangle_z + \lvert 1 \rangle_z \Big)$$

kanssa rinnakkain, huomataan analogiset ominaisuudet:

Väri vastaa spinin suuntaa (valittua kantaa) ja muoto spinin arvoa (vastaavaa tilaa) ko. suunnassa. Tässä siis punaisessa kannassa $\bigcirc$ vastaisi tilaa ylös x-suunnassa, sinisessä kannassa $\triangle$ vastaisi tilaa ylös z-suunnassa ja $\square$ tilaa alas z-suunnassa. Käytännössä siis olemme vain vaihtaneet merkintätapaa ja voisimme yhtä hyvin käyttää värejä ja muotoja 0, 1, z:n ja x:n tilalla.

b) i)

Todennäköisyydet havaita tietty mittaustulos

spin z-suunnassa ylös	**spin z-suunnassa alas**	**tarkistus**
$\left\lvert \frac{2}{\sqrt{13}} \right\rvert^2 = \frac{4}{13}$	$\left\lvert \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rvert^2 = \frac{9}{13}$	$\frac{4}{13} + \frac{9}{13} = 1$

ii) ii) Ratkaistaan ensin, mitä ovat z-suuntaiset spin-tilat lausuttuna x-suuntaisten tilojen avulla.

$$\begin{cases} |0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_z + |1\rangle_z\Big) \\ \\ |1\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_z - |1\rangle_z\Big) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |0\rangle_x + |1\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\,|0\rangle_z = \sqrt{2}\,|0\rangle_z$$

$$\Leftrightarrow \quad |0\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_x + |1\rangle_x\Big)$$

Accordingly

$$|1\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_x - |1\rangle_x\Big)$$

Kirjoitetaan alkuperäinen tila x-suuntaisten tilojen avulla

$$|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{13}}\,|0\rangle_z + \frac{3}{\sqrt{13}}\,|1\rangle_z$$

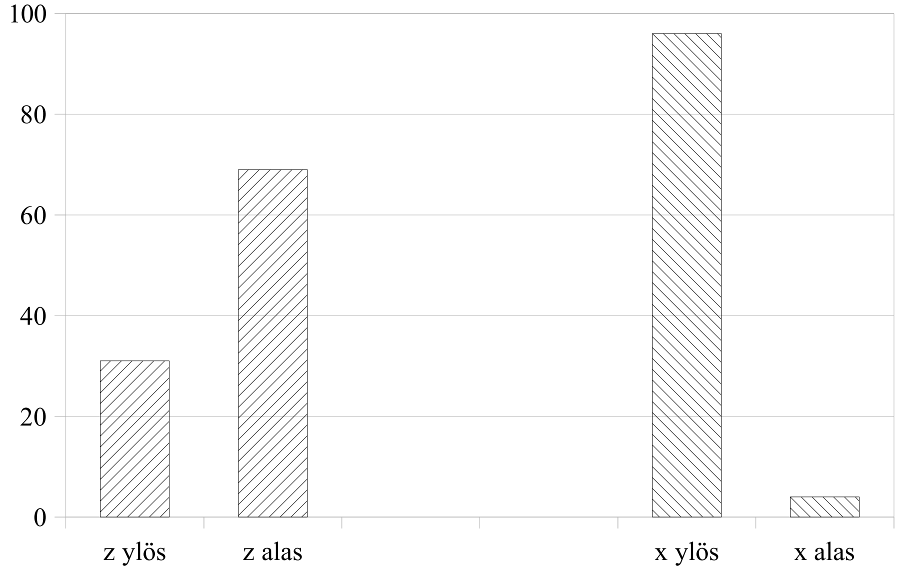
$$= \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_x + |1\rangle_x\Big) + \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_x - |1\rangle_x\Big)$$

$$= \frac{5}{\sqrt{26}}\,|0\rangle_x - \frac{1}{\sqrt{26}}\,|1\rangle_x$$

Todennäköisyydet havaita tietty mittaustulos

spin x-suunnassa ylös	**spin x-suunnassa alas**	**tarkistus**
$\left\lvert\frac{5}{\sqrt{26}}\right\rvert^2 = \frac{25}{26}$	$\left\lvert\frac{1}{\sqrt{25}}\right\rvert^2 = \frac{1}{26}$	$\frac{25}{26} + \frac{1}{26} = 1$

iii)



4.

a)

Todennäköisyydet havaita tietty mittaustulos

spin ylös	**spin alas**	**tarkistus**
$\left\|\frac{3}{\sqrt{34}}\right\|^2 = \frac{9}{34}$	$\left\|\frac{5}{\sqrt{34}}\right\|^2 = \frac{25}{34}$	$\frac{9}{34} + \frac{25}{34} = 1$

b) Välittömästi mittauksen jälkeen systeemi on tilassa $|0\rangle_z$. Kirjoitetaan tila x-suuntaisten spin-tilojen avulla

$$|0\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_x + |1\rangle_x\right)$$

Todennäköisyydet havaita tietty mittaustulos

spin x-suunnassa ylös	**spin x-suunnassa alas**	**tarkistus**
$\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\right\|^2 = \frac{1}{2}$	$\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\right\|^2 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

S1.

Normitetaan tila ensin.

$$\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{30}} \Big(|0\rangle - 2\,|1\rangle + 5\,|-1\rangle \Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}}\,|0\rangle - \frac{2}{\sqrt{30}}\,|1\rangle + \frac{5}{\sqrt{30}}\,|-1\rangle \end{aligned}$$

Todennäköisyydet havaita tietty mittaustulos

tulos 0	**tulos** 1	**tulos** -1	**tarkistus**
$\left\lvert \frac{1}{\sqrt{30}} \right\rvert^2 = \frac{1}{30}$	$\left\lvert \frac{2}{\sqrt{30}} \right\rvert^2 = \frac{2}{15}$	$\left\lvert \frac{5}{\sqrt{30}} \right\rvert^2 = \frac{5}{6}$	$\frac{1}{30} + \frac{2}{15} + \frac{5}{6} = 1$