Deutschin algoritmi

Lasketaan tilavektori kuvan mukaisissa vaiheissa 1, 2, 3, ja 4.

Vaihe 1. Meillä on kaksi kubittia, ja näitä kuvaava tilavektori on yksittäisten kubittien tilavektorien tulo:

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle_1 |1\rangle_2.$$

Vaihe 2. Nyt kumpikin kubitti kulkee toisistaan riippumatta kvanttiportin H läpi. Muistetaan, että yleisesti

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \\ H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned}$$

Käyttämällä näitä tuloksia kubitille 1 ja 2 saadaan vaiheessa 2 tilavektori

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle_1 + |1\rangle_1\right)\left(|0\rangle_2 - |1\rangle_2\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle_1|0\rangle_2 - |0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2 - |1\rangle_1|1\rangle_2\right). \end{aligned}$$

Vaihe 3. Seuraavaksi kukin edellisessä vaiheessa muodostetun superposition termeistä kulkee portin U_f läpi. Tässä portissa 1. kubitin arvo x (joka on siis 0 tai 1) ei muutu, mutta 2. kubitin arvo muuttuu arvosta y arvoon $y + f(x)$. Summan laskemisessa muistetaan, että 0+0=0, 1+0=1, 0+1=1 ja 1+1=0. Näin saadaan aluksi

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle_1|0+f(0)\rangle_2 - |0\rangle_1|1+f(0)\rangle_2 + |1\rangle_1|0+f(1)\rangle_2 - |1\rangle_1|1+f(1)\rangle_2\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle_1|f(0)\rangle_2 - |0\rangle_1|1+f(0)\rangle_2 + |1\rangle_1|f(1)\rangle_2 - |1\rangle_1|1+f(1)\rangle_2\right), \end{aligned}$$

missä toiselle riville siirryttäessä huomattiin, että $0 + f(0) = f(0)$ ja $0 + f(1) = f(1)$.

Tila kannattaa nyt kirjoittaa tarkemmin tilanteissa $f(0) = f(1)$ ja $f(0) \neq f(1)$. Otetaan tavoitteeksi kirjoittaa tilavektori niin, että siinä näkyy vain $f(0)$. Ensimmäinen tapaus, $f(0) = f(1)$ on helppo: edellä olleessa tilavektorin lausekkeessa voidaan $f(1)$ vain korvata $f(0)$:lla. Jälkimmäinen tapaus, $f(0) \neq f(1)$, on hiukan hankalampi. Nyt kannattaa muistaa, että sekä $f(0)$ että $f(1)$ voivat saada vain arvoja 0 tai 1. On helppoa todeta, että jos $f(0) \neq f(1)$, niin

$$f(1) = 1 + f(0), \qquad 1 + f(1) = f(0).$$

Näiden päätelmien avulla saadaan tilavektori $|\psi_3\rangle$ muotoon

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}\begin{cases} |0\rangle_1|f(0)\rangle_2 - |0\rangle_1|1+f(0)\rangle_2 + |1\rangle_1|f(0)\rangle_2 - |1\rangle_1|1+f(0)\rangle_2, & \text{jos } f(0) = f(1) \\ |0\rangle_1|f(0)\rangle_2 - |0\rangle_1|1+f(0)\rangle_2 + |1\rangle_1|1+f(0)\rangle_2 - |1\rangle_1|f(0)\rangle_2, & \text{jos } f(0) \neq f(1) \end{cases}$$

Tämä voidaan edelleen kirjoittaa muodossa

$$|\psi_3\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 + |1\rangle_1)\frac{1}{\sqrt{2}}(|f(0)\rangle_2 - |1+f(0)\rangle_2), & \text{jos } f(0) = f(1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 - |1\rangle_1)\frac{1}{\sqrt{2}}(|f(0)\rangle_2 - |1+f(0)\rangle_2), & \text{jos } f(0) \neq f(1) \end{cases}$$

Tästä muodosta nähdään, että mikäli $f(0) = f(1)$, niin kubitti 1 on tilassa $(|0\rangle_1 + |1\rangle_1)/\sqrt{2}$, ja mikäli $f(0) \neq f(1)$, niin kubitti 1 on tilassa $(|0\rangle_1 - |1\rangle_1)/\sqrt{2}$.

Vaihe 4. Muistetaan, että

$$\begin{aligned} H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) &= |0\rangle, \\ H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) &= |1\rangle, \end{aligned}$$

joten viimeisessä vaiheessa saadaan

$$|\psi_3\rangle = \begin{cases} |0\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(|f(0)\rangle_2 - |1+f(0)\rangle_2), & \text{jos } f(0) = f(1) \\ |1\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(|f(0)\rangle_2 - |1+f(0)\rangle_2), & \text{jos } f(0) \neq f(1) \end{cases}$$

Mitattaessa nyt kubitin 1 arvo, tulos antaa yksikäsitteisesti tiedon onko $f(0) = f(1)$ vai $f(0) \neq f(1)$.